« Axiomes de rationalité en contexte d'incertitude »

Denis Moffet

L'Actualité économique, vol. 63, n° 2-3, 1987, p. 58-73.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: http://id.erudit.org/iderudit/601410ar

DOI: 10.7202/601410ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

AXIOMES DE RATIONALITÉ EN CONTEXTE D'INCERTITUDE

Denis MOFFET*
Université Laval

Le principe de la maximisation de l'utilité espérée s'est imposé comme le principal paradigme de la décision en contexte d'incertitude. Ce principe repose sur une axiomatique controversée. Les axiomes litigieux sont l'axiome de substitution de Marschak et l'axiome d'indépendance de Savage. Le but de cette communication est de faire ressortir, d'une part, le caractère non axiomatique des prescriptions de Marschak et de Savage et, d'autre part, de montrer par une démarche par l'absurde qu'il peut être coûteux de ne pas agir conformément à ces prescriptions. Finalement, je vais proposer de nouveaux axiomes qui, par un processus déductif, conduiront à un théorème de substitution dont on pourra également déduire le principe de maximisation de l'utilité espérée.

Axioms of rationality under uncertainty. — The Maximum Expected Utility criterion has become the main paradigm of decision-making under uncertainty. This criterion is based on an axiomatic that is not unanimously accepted. The axioms under attack are Marschak's substitution axiom and Savage's independence axiom. The purpose of this paper is, on one hand, to bring into evidence the non-axiomatic nature of Marschak's and Savage's propositions and, on the other hand, to show that violations of these propositions lead to contradictions. New axioms will be proposed which by means of a deductive process lead to a theorem of substitution from which the Maximum Expected Utility criterion can be derived.

INTRODUCTION

Le principe de la maximisation de l'utilité espérée (principe MUE) s'est imposé depuis une quarantaine d'années comme le principal paradigme de la décision en contexte d'incertitude.

Le principe MUE remonte à 1738, au temps de Daniel Bernoulli [4], mais il doit sa popularité, auprès des économistes, aux travaux de Von Neumann et Morgenstern publiés en 1947 dans leur ouvrage devenu célèbre depuis lors, et qui s'intitule *Theory of Games and Economic Behavior* [18].

* Sciences de l'administration, Directeur de la chaire en assurance. L'auteur tient à remercier Francis Taurand et Claude Autin pour la valeur de leurs commentaires.

Le principe MUE repose sur une axiomatique dont plusieurs variantes sont connues ; dans cette communication j'adopterai celle de Borch [6] à cause de sa simplicité et aussi, parce qu'elle fait très clairement le lien avec les règles élémentaires du calcul des probabilités.

Au début des années 50, cette axiomatique souleva une grande controverse et les attaques les plus virulentes à son égard furent dirigées par Maurice Allais [1, 2]. Selon la variante axiomatique utilisée, deux axiomes apparaissent particulièrement litigieux ; soit l'axiome de substitution de Marschak [10] soit l'axiome d'indépendance de Savage [13,14].

La controverse du début des années 50 est loin d'être apaisée. Des travaux récents de Kahneman, Slovic et Tversky [7] montrent éloquemment les faiblesses descriptives du principe MUE. L'excellente revue de la littérature effectuée par P.J.H. Shoemaker et publiée en 1982 [15] abonde en exemples de toutes sortes faisant ressortir les difficultés d'application du principe MUE.

Au cours de cette même année 1982, la revue *Econometrica* publia un article de près de cinquante pages de M. J. Machina [9] consacré à la présentation d'un paradigme MUE qui ne ferait pas intervenir l'axiome d'indépendance. Cet article est d'une lecture difficile et le fait qu'il ait été publié indique bien l'importance de la controverse tournant autour de l'axiomatique supportant le principe MUE. D'autres auteurs préconisent également l'abandon de l'axiome d'indépendance *i.e.* Bernard [3].

Le but de l'approche que je préconise n'est pas d'éviter l'axiome d'indépendance de Savage, mais plutôt de montrer que le point de vue de Savage est acceptable suite à un processus déductif reposant sur des propositions recueillant plus facilement l'assentiment des personnes intéressées.

L'enseignement de l'économie du risque pendant plus de dix ans m'a amené à développer une axiomatique qui est une modification de celle de Borch. Dans mon évolution, je me suis d'abord rendu compte que certains des « axiomes » proposés n'avaient pas le caractère axiomatique qu'on leur prêtait ; en ce sens qu'un axiome devrait être un principe premier, « une vérité indémontrable mais évidente par quiconque en comprend le sens » (*Petit Robert*). On ne peut certes pas prétendre qu'une proposition revêt un caractère axiomatique quand, quarante ans après qu'on l'a énoncée, nombre d'esprits bien portants en voient plutôt les aspects paradoxaux.

Une fois ce contrat bien établi, je me suis rendu compte qu'il était toutefois possible de convaincre, par un processus déductif, des esprits récalcitrants de la nécessité d'adopter un comportement conforme aux « axiomes » proposés. Il fallait donc faire intervenir d'autres axiomes quitte à ce que d'anciens « axiomes » deviennent plutôt des théorèmes.

Dans le langage courant, les adjectifs « axiomatique » et « intuitif » peuvent être considérés comme étant des synonymes. Cependant, dans l'élaboration de théories mathématiques, on ne s'attend pas à ce qu'un axiome revête un caractère intuitif comme en fait foi Stoll ([17] p. 123) :

> « *It was only natural that Euclid... regarded his axioms as self-evident truths. This attitude with respect to the nature of axioms still persists in the mind of many. Indeed, in current non-mathematical writings it is not uncommon to see such phrases as « It is axiomatic that » and « It is a fundamental postulate of » used to mean that some statement is beyond all logical opposition. Within mathematics, this point of view with respect to the nature of axioms has altered radically* ».

Cette mise au point ayant été faite, je prends parti avec Samuelson ([12] p. 677) pour une exposition « opérationnelle » des axiomes de rationalité. Sinon, on risque de perdre de vue l'objet des sciences économiques qui est la compréhension de la réalité économique.

La démarche que je propose est essentiellement celle de Blanché ([5] p. 44). En prenant soin de noter préalablement que Blanché utilise indifféremment les termes « axiomes » et « postulat », laissons-le présenter cette démarche : « Dire que deux postulats ne sont pas indépendants, c'est dire que l'un peut être démontré, soit directement, soit du moins par l'absurde, à partir de l'autre : dans ce cas, il sera conforme à l'esprit de la méthode déductive de produire cette démonstration et de faire passer la proposition parmi les théorèmes ».

Cette communication ne prétend pas mettre un terme à la controverse entourant les axiomes de rationalité. Elle se présente plutôt comme un exercice portant sur l'application de la méthode déductive.

1. LE PRINCIPE MUE À LA FAÇON DE KARL BORCH

L'axiomatique supportant le principe MUE peut être présentée de diverses façons. J'adopterai ici la façon de Karl Borch [6].

Soit une loterie A_i où p_{ij} est la probabilité de gagner le lot x_j
$A_i : (p_{i1} \ldots p_{in} ; x_1 \ldots x_n)$

par convention on pose $x_1 < x_2 \ldots < x_n$. On a $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

On cherche pour chaque loterie un indice K_i de sorte que

$$A_i \mathscr{R} A_j \leftrightarrow K_i R K_j,$$

où $\mathscr{R}$ représente une relation de préférence et où R représente une relation de grandeur. De façon plus formelle, on peut écrire

$$\mathscr{R} \in \{>, \sim, <\} \text{ et } R \in \{>, =, <\}$$

Axiome I (axiome d'Archimède).

Toute loterie a un prix *i.e.* il existe θ_i de sorte que $(1 ; \theta_i) \sim A_i$.

Axiome II (axiome de continuité).

Soit $(1\ ;\theta) \sim (p, 1-p\ ; 0, x)$, alors pour tout $p \in (0,1)$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial p}$ existe et pour tout $x \in (0, \infty)$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ existe.

Axiome III (non-saturation).

Soit $(1\ ;\theta) \sim (p, 1-p\ ; 0, x)$, alors pour tout $p \in (0,1)$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial p} < 0$ et pour tout $x \in (0, \infty)$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} > 0$.

Axiome IV (axiome de substitution ou axiome de Marschak)[1].

Soit $A : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n ; x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$

Soit $(1\ ; x_j) \sim (\lambda_j, 1-\lambda_j\ ; x_1, x_n)$

Soit $\hat{A} : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n\ ; x_1, \ldots, (\lambda_j, 1-\lambda_j\ ; x_1, x_n), \ldots, x_n)$

Alors $A \sim \hat{A}$.

Ces trois premiers axiomes sont généralement bien acceptés, tout en admettant que l'on puisse observer des comportements déviants. Ainsi, mes étudiants admettent facilement que l'on peut rencontrer des ascètes dont le comportement irait à l'encontre de l'axiome de non-saturation.

Mes étudiants admettent aussi bien volontiers, que le comportement humain peut présenter des discontinuités ; mais en même temps, ils admettent qu'idéalement, il est préférable d'avoir de la suite dans les idées sinon on risque de verser dans le ridicule. Certains d'entre eux ont déjà entendu l'anecdote suivante que l'on doit, semble-t-il à George Bernard Shaw.

M. Shaw étant présent à une soirée mondaine demande discrètement à une belle et noble dame « Madame, pour un million de livres, accepteriez-vous de passer une folle nuit d'amour en ma compagnie ? » Après une pudique hésitation, la dame répondit dans l'affirmative, s'imaginant sans doute que de toute façon sa réponse était sans conséquence. M. Shaw revint à la charge et cette fois lui demanda « Madame, pour une livre accepteriez-vous de passer une non moins folle nuit d'amour en ma compagnie ? » Et cette fois, la belle et noble dame de répondre sans hésitation « Mais, à la fin, M. Shaw pour qui me prenez-vous ? » Et sans hésitation, M. Shaw de répondre : « Ce pour quoi je vous prends ayant été déterminé par votre réponse à ma première question, il reste maintenant à fixer le prix ».

1. Marschak n'a pas présenté l'axiome de substitution de cette manière ; cependant, il me semble découler logiquement de son postulat IV ([10], p. 120). Ce point de vue est partagé par Sinn ([16], pp. 22-23).

On ne sait trop comment se termina la conversation entre M. Shaw et la belle et noble dame. Chose certaine, mes étudiants me semblent toujours convaincus de l'importance de respecter l'axiome de continuité.

Si on applique successivement l'axiome de substitution pour tous les lots $x_j < x_n$, remplaçant tout lot x_j par une loterie $(\lambda_j,\ 1-\lambda_j\ ;\ 0,\ x_n)$, toute loterie peut être réduite à une loterie de forme

$$A_i^* : (1-p_i^*,\ p_i^*\ ;\ 0,\ x_n)$$

où
$$p_i^* = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,\lambda_j$$

et il en résulte que $A_i \sim A_i^*$. Par conséquent, on obtient comme règle de décision

$$A_i \gtrless A_j \leftrightarrow p_i^* \gtreqless p_j^*$$

Si, par convention on pose $u(x_j) \equiv \lambda_j$, on obtient

$$p_i^* = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, u(x_j) \equiv U_i$$

et on peut maintenant écrire

$$A_i \gtrless A_j \leftrightarrow U_i \gtreqless U_j$$

Cette dernière règle de décision est le principe MUE. Toute transformation de $u(x_j)$ de la forme

$$v(x_j) = a\,u(x_j) + b$$

où $a > 0$ maintiendra l'ordre de préférence obtenu.

Parvenu à ce point, il est important de constater que le principe MUE découle directement de « l'axiome » de substitution. À toutes fins pratiques, le caractère axiomatique de l'un implique le caractère axiomatique de l'autre. Or, à venir jusqu'à ce jour, je n'ai pas rencontré qui que ce soit qui ose présenter le principe MUE comme étant un axiome.

2. LE PARADOXE DE MAURICE ALLAIS

Au début des années 50, Maurice Allais fit circuler un questionnaire parmi des économistes de renom (voir [1]). L'une des questions avait l'allure suivante (les lots sont exprimés en millions) :

a) Soit $A_1 : (1\ ;\ 1)$ et $A_2 : (.05,\ .50,\ .45\ ;\ 0,\ 1,\ 5)$ laquelle des deux loteries préférez-vous ?

b) Soit $A_3 : (.50,\ .50\ ;\ 0,\ 1)$ et $A_4 : (.55,\ .45\ ;\ 0,\ 5)$ laquelle des deux loteries préférez-vous ?

Selon le principe MUE, on obtient après simplification :

$$A_1 \gtreqless A_2 \leftrightarrow .50u(1) \gtreqless .05u(0) + .45u(5).$$

et $$A_3 \gtreqless A_4 \leftrightarrow .50u(1) \gtreqless .05u(0) + .45u(5).$$

Il s'ensuit donc que les choix respectant le principe MUE doivent être nécessairement

$$A_1 \succ A_2 \text{ et } A_3 \succ A_4$$

ou bien

$$A_2 \succ A_1 \text{ et } A_4 \succ A_3$$

ou encore

$$A_1 \sim A_2 \text{ et } A_3 \sim A_4.$$

De façon plus concise, on peut écrire

$$\{A_1 \mathscr{R} A_2\} \leftrightarrow \{A_3 \mathscr{R} A_4\}.$$

Par conséquent, tout autre choix est incohérent au sens des axiomes de rationalité qui ont été présentés. Typiquement, j'observe qu'environ 50% de mes étudiants sont, de cette façon, irrationnels. Ils sont en bonne compagnie puisqu'ils rejoignent ainsi le célèbre statisticien Leonard Savage. C'est cette forme d'irrationalité que l'on appelle le paradoxe de Maurice Allais.

Pour Maurice Allais, il semble que le fait qu'un individu se prétendant rationnel préfère A_1 à A_2 et en même temps préfère A_4 à A_3 devrait être suffisant pour l'amener à rejeter les axiomes de rationalité. Pour Leonard Savage, il semble plutôt qu'il y a effectivement incohérence et qu'un individu rationnel devrait reconsidérer ses choix.

L'axiome de substitution de Marschak permet de ramener chacune des loteries sous la forme $A_i^* : (1-p_i^*, p_i^* ; 0, 5)$. En effet, il suffit de demander à un individu quelle est la probabilité λ telle que

$$(1 ; 1) \sim (1-\lambda, \lambda ; 0, 5)$$

et par la suite on obtiendra

$$\begin{aligned} A_1 &\sim A_1^* \quad \text{où} \quad p_1^* = \lambda \\ A_2 &\sim A_2^* \quad \text{où} \quad p_2^* = .45 + .50\lambda \\ A_3 &\sim A_3^* \quad \text{où} \quad p_3^* = .50\lambda \\ A_4 &\sim A_4^* \quad \text{où} \quad p_4^* = .45 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$p_1^* \gtreqless p_2^* \leftrightarrow \lambda \gtreqless 9/10 \quad \text{et} \quad p_3^* \gtreqless p_4^* \leftrightarrow \lambda \gtreqless 9/10.$$

On voit donc que les seuls choix admissibles sont

$$\{A_1 \succ A_2, A_3 \succ A_4\}, \{A_2 \succ A_1, A_4 \succ A_3\} \text{ et } \{A_1 \sim A_2, A_3 \sim A_4\}.$$

Tout autre choix impliquerait que la probabilité λ varie d'une loterie à l'autre. De façon plus concise on peut écrire

$$\{A_1 \ \mathcal{R} \ A_2 \text{ et } A_3 \ \mathcal{R} \ A_4\} \leftrightarrow \{\lambda \ R \ 9/10\}.$$

L'axiome d'indépendance de Savage, qui n'a pas été requis dans l'axiomatique qui a été utilisée, peut s'énoncer comme suit : soit deux loteries

$$B : (p,\ 1-p\ ;\ A_i,\ A) \text{ et } C : (p,\ 1-p\ ;\ A_j,\ A)$$

alors, peu importe la loterie A,

$$\{B \ \mathcal{R} \ C\} \leftrightarrow \{A_i \ \mathcal{R} \ A_j\}$$

Revenant à l'exemple de Maurice Allais, il est facile de réécrire les quatre loteries de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&A_1 : (.50,\ .50\ ;\ 1,\ 1)\\
&A_2 : (.50,\ .50\ ;\ (.10,\ .90\ ;\ 0,\ 5),\ 1)\\
&A_3 : (.50,\ .50\ ;\ 1,\ 0)\\
&A_4 : (.50,\ .50\ ;\ (.10,\ .90\ ;\ 0,\ 5),\ 0).
\end{aligned}$$

Selon l'axiome d'indépendance, on a donc :

$$A_1 \ \mathcal{R} \ A_2 \leftrightarrow (1\ ;\ 1) \ \mathcal{R} \ (.10,\ .90\ ;\ 0,\ 5)$$

et

$$A_3 \ \mathcal{R} \ A_4 \leftrightarrow (1\ ;\ 1) \ \mathcal{R} \ (.10,\ .90\ ;\ 0,\ 5)$$

Il s'ensuit encore que les seuls choix admissibles sont

$$\{A_1 \succ A_2, A_3 \succ A_4\},\ \{A_2 \succ A_1, A_4 \succ A_3\} \text{et } \{A_1 \sim A_2, A_3 \sim A_4\}.$$

Imaginons la situation où un individu préfère A_1 à A_2 et en même temps préfère A_4 à A_3. Imaginons aussi que cet individu est très satisfait de son choix et qu'il prétend que ses préférences invalident purement et simplement le principe MUE ou les axiomes qui le supportent. C'est là une attitude à laquelle j'ai été maintes fois confronté et c'est alors que je propose une forme de preuve par l'absurde.

Proposons à un tel individu le choix entre les deux loteries suivantes :

$$A_5 : (.50,\ .50\ ;\ A_1,\ A_4) \text{ et } A_6 : (.50,\ .50\ ;\ A_2,\ A_3).$$

Inmanquablement, cet individu nous répondra qu'il préfère A_5 à A_6 car peu importe la situation finale, il aura toujours une loterie préférée. Il serait donc disposé à payer plus cher pour participer à la loterie A_5 que pour participer à la loterie A_6. À ce moment, on effectue quelques calculs et on constate que les loteries A_5 et A_6 sont parfaitement identiques. En effet, on a :

$$A_5 \equiv A_6 : (.275,\ .500,\ .225\ ;\ 0,\ 1,\ 5).$$

La situation devient intenable car l'individu se rend alors compte qu'il payerait plus cher une même loterie seulement par le fait qu'elle soit présentée de façon différente. À ce jour, je n'ai pas encore rencontré quelqu'un qui n'ait pas accepté de reviser ses choix.

Cette analyse du paradoxe de Maurice Allais met en évidence le fait que bon nombre d'individus n'acceptant pas le caractère axiomatique des « axiomes » de rationalité sont néanmoins disposés à les accepter suite à un raisonnement par l'absurde.

Maurice Allais a montré comment certaines personnes peuvent violer, à leur insu, « l'axiome » de substitution de Marschak. Il peut cependant se produire que certaines personnes soient disposées à violer de façon consciente l'axiome de substitution et ce, avec des arguments qui pourraient ébranler, chez plus d'un, leur foi dans le principe MUE.

Imaginons en effet une personne qui se déclare indifférente entre les deux loteries suivantes :

$$A_1 : (0.2, 0.6, 0.2 ; 0, 5, 10) \text{ et } A_2 : (0.3, 0.3, 0.4 ; 0, 5, 10).$$

Supposons que l'on demande à cette personne de remplacer le lot $x_2 = 5$ par une loterie de forme

$$B_i : (p_i, 1-p_i ; 0, 10)$$

de sorte qu'elle soit toujours indifférente entre les loteries transformées

$$\hat{A}_1 : (0.2, 0.6, 0.2 ; 0, B_1, 10) \text{ et } \hat{A}_2 : (0.3, 0.3, 0.4 ; 0, B_2, 10)$$

et que, de plus, elle soit indifférente entre A_1 et $\hat{A}_1$ et indifférente aussi entre A_2 et $\hat{A}_2$. Selon Marschak, toute personne rationnelle devrait spontanément choisir deux loteries identiques B_1 et B_2.

Cependant, supposons que notre sujet choisit B_1 et B_2 de la façon suivante :

$$B_1 : (1/4, 3/4 ; 0, 10) \text{ et } B_2 : (1/6, 5/6 ; 0, 10).$$

Ce choix est-il si irrationnel ? Pour notre sujet qui connaît les règles du calcul des probabilités, il ne l'est pas du tout car il nous fait remarquer que $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont identiques. En effet, on peut vérifier que

$$\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2 : (.35, .65 ; 0, 10).$$

À ce point, rien n'indique que ce sujet est irrationnel en exprimant son indifférence entre A_1, A_2, $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$. Allons-nous l'excommunier ex cathedra ?

Encore une fois, nous pouvons adopter une démarche par l'absurde pour le convaincre qu'il ne peut sous ces conditions satisfaire

$$A_1 \sim A_2 \sim \hat{A}_1 \sim \hat{A}_2.$$

Proposons-lui la loterie C : $(0.50, 0.50 ; A_1, \hat{A}_1)$. Puisqu'il nous a déjà exprimé son indifférence entre A_1 et $\hat{A}_1$, il devrait nous confirmer qu'il est indifférent entre C, A_1 et $\hat{A}_1$. Au départ, il était indifférent entre A_1 et A_2 ; par conséquent, il devrait maintenant être indifférent entre C et A_2.

Selon les règles du calcul des probabilités, la loterie C peut s'écrire de façon équivalente :

$$C : (11/40,\ 12/40,\ 17/40\ ;\ 0,\ 5,\ 10).$$

Mais au départ on avait

$$A_2 : (12/40,\ 12/40,\ 16/40\ ;\ 0,\ 5,\ 10).$$

En absence de saturation, on a indiscutablement $C > A_2$, contredisant ainsi l'indifférence entre C et A_2 qui aurait dû être observée par transitivité. Notre sujet se trouve maintenant dans une position intenable et devra reconsidérer le bien-fondé de choisir des loteries B_1 et B_2 qui soient différentes. Par un processus de tâtonnement, il se rendra compte que la seule façon d'éviter les situations absurdes est de choisir

$$B_1 \equiv B_2 : (1/3,\ 2/3\ ;\ 0,\ 10).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder une nouvelle axiomatique qui s'inspirera de cette démarche par l'absurde que nous venons d'effectuer ; « l'axiome » de substitution deviendra en fait un théorème de substitution.

3. THÉORÈME DE SUBSTITUTION

Les trois premiers axiomes de la version de Karl Borch seront conservés. Il s'agit de l'axiome d'Archimède, de l'axiome de continuité et de l'axiome de non-saturation. Le but de cette nouvelle axiomatique est essentiellement de justifier « l'axiome » de substitution de Marschak par un processus déductif. Cet « axiome » deviendra donc un théorème.

En toute justice à l'égard de Marschak, il me semble important de signaler que Marschak lui-même n'utilisait pas le terme « axiome » mais plutôt le terme « postulat ». Selon le *Petit Robert*, un postulat est un principe d'un système déductif qu'on ne peut prendre pour fondement d'une démonstration sans l'assentiment de l'auditeur. À mon avis, Marschak faisait ainsi montre d'une sage prudence. Souvent, en relisant les écrits du début des années 50 portant sur le principe MUE, je suis porté à donner raison à l'économiste anglais Peter Wiles qui disait : « *An axiom is only a premise one is not allowed to question, dressed up as something grand* » (tel que cité par R. Kuttner [8]).

Avant de présenter les axiomes, deux concepts seront définis : les loteries équivalentes et la forme réduite d'une loterie.

Deux loteries seront dites équivalentes si, en vertu des règles du calcul des probabilités, elles peuvent se ramener à la même forme. Ainsi, la loterie A_1 : $(1\ ;\ x)$ est équivalente à la loterie A_2 : $(1/2,\ 1/2\ ;\ x,\ x)$; de même la loterie A_3 : $(1/2,\ 1/2\ ;\ 0,\ x)$ est équivalente à la loterie A_4 : $(1/4,\ 3/4\ ;\ 0,\ (1/3,\ 2/3\ ;\ 0,\ x))$. Si les loteries A_i et A_j sont équivalentes, on écrira $A_i \equiv A_j$.

Soit $A_i : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n ; x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$

alors on va définir $\hat{A}_i$, la forme réduite de A_i, de la façon suivante

$$\hat{A}_i : (\hat{p}_1, \ldots, 0, \ldots, \hat{p}_n ; x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

où $\hat{p}_1 + \hat{p}_n = p_1 + p_n + p_j$. En définissant ainsi la forme réduite d'une loterie, on indique qu'il est possible d'éliminer un lot intermédiaire en augmentant les probabilités de gagner les lots x_1 et x_n. Contrairement à Marschak, on n'exige pas que cette façon soit unique et que, de plus, elle soit liée aux préférences en situation de certitude.

Les axiomes peuvent maintenant être présentés. Les trois premiers axiomes seront les mêmes que ceux présentés dans la section 1.

Axiome I — L'axiome d'Archimède.

Axiome II — L'axiome de continuité.

Axiome III — L'axiome de non-saturation.

Axiome IV — Axiome d'absence d'illusion : une personne sera indifférente entre deux loteries équivalentes.

Axiome V — Axiome de transitivité : soit trois loteries A_1, A_2 et A_3 de sorte que $A_1 \sim A_2$ et $A_2 \sim A_3$, alors on aura $A_1 \sim A_3$.

Axiome VI — Axiome de composition : soit quatre loteries A_1, A_2, A_3 et A_4 de sorte que $A_1 \sim A_2$ et $A_3 \sim A_4$, alors on aura $(p, 1-p ; A_1, A_3) \sim (p, 1-p ; A_2, A_4)$; a fortiori si $A_1 > A_2$ et $A_3 > A_4$ on aura $(p, 1-p ; A_1, A_3) > (p, 1-p ; A_2, A_4)$.

Axiome VII — Axiome de réduction :

Soit $A : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n ; x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ alors on peut trouver $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_n$ satisfaisant $\hat{p}_1 + \hat{p}_n = p_1 + p_n + p_j$ de sorte que $A \sim \hat{A}$ où $\hat{p}_j = 0$, et où $\hat{p}_i = p_i$ lorsque $i \neq 1, j, n$.

Ces axiomes s'inspirent de la preuve par l'absurde présentée dans la section précédente. L'expérience de la salle de cours a prouvé, d'année en année, que ni « l'axiome » de substitution de Marschak, ni « l'axiome » d'indépendance de Savage n'apparaissent comme une « évidence par quiconque en comprend le sens ». D'autre part, tout raisonnement faisant intervenir autant indirectement que directement les axiomes nouvellement présentés, était facilement accepté par quiconque en comprenait le sens.

Certains déploreront que pour parvenir à nos fins il ait fallu augmenter le nombre d'axiomes. Mais comme l'écrivait Menger ([11], p. 105) :

« Science and mathematics rarely consider unnecessary entities. But the past three centuries have witnessed the development of the opposite menace. In

many cases, too few entities are being considered. Necessary entities have been suppressed or allowed to merge in misconceptions that are insufficient to account for the variety of ideas ».

Plus loin, il ajoute : « *It is vain to try to do with less what requires more* ».

Les axiomes qui ont été présentés peuvent maintenant être rassemblés en un tout qui pourra être identifié comme le théorème de substitution.

Théorème de substitution

Soit 1) $A : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n \,;\, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$

2) $(1, x_j) \sim (\lambda, 1-\lambda \,;\, x_1, x_n)$

3) $\widetilde{A} : (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n \,; x_1, \ldots, (\alpha, 1-\alpha \,;\, x_1, x_n), \ldots x_n)$

alors $A \sim \widetilde{A} \leftrightarrow \alpha = \lambda$

Preuve

1. En vertu de l'axiome de réduction, on peut trouver $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_n$, tels que $\hat{p}_1 + \hat{p}_n = p_1 + p_n + p_j$, de sorte que

$$\boxed{A \sim \hat{A}}$$

2. Construisons deux loteries B et C de la façon suivante :

$$B : \left[\frac{1}{1+p_j}, \frac{p_j}{1+p_j} \,; A, (\lambda, 1-\lambda \,; x_1, x_n)\right]$$

$$C : \left[\frac{1}{1+p_j}, \frac{p_j}{1+p_j} \,; \hat{A}, x_j\right]$$

En vertu de l'axiome de composition, on doit avoir

$$\boxed{B \sim C}$$

3. Selon les règles du calcul des probabilités, la loterie B est équivalente à la loterie

$$B^* : (p^*_{B1}, \ldots, p^*_{Bn} \,;\, x_1, \ldots, x_n)$$

et la loterie C est équivalente à la loterie

$$C^* : (p^*_{C1}, \ldots, p^*_{Cn} \,;\, x_1, \ldots, x_n)$$

où $p^*_{Bi} = p^*_{Ci} = \dfrac{p_i}{1+p_j} \qquad i = 2, \ldots, n-1$

$$p^*_{B1} = \frac{p_1 + \lambda p_j}{1+p_j} \qquad p^*_{Bn} = \frac{p_n + (1-\lambda)p_j}{1+p_j}$$

$$p^*_{C1} = \frac{\hat{p}_1}{1+p_j} \qquad p^*_{Cn} = \frac{\hat{p}_n}{1+p_j}$$

Selon l'axiome d'absence d'illusion, on doit avoir

$$B \sim B^* \text{ et } C \sim C^*$$

4. Selon l'axiome de transitivité, on a maintenant

$$\boxed{B^* \sim C^*}$$

5. Selon l'axiome de non-saturation, si $B^* \sim C^*$, il faut nécessairement

$$p^*_{B1} = p^*_{C1} \quad \text{et} \quad p^*_{Bn} = p^*_{Cn}$$

ce qui implique

$$\hat{p}_1 = p_1 + \lambda p_j \quad \text{et} \quad \hat{p}_n = p_n + (1-\lambda)p_j$$

6. Selon les règles du calcul des probabilités, la loterie $\widetilde{A}$ est équivalente à la loterie

$$\widetilde{A}^* : (p^*_1, \ldots, p^*_n \, ; \, x_1, \ldots, x_n)$$

où $p^*_i = p_i \qquad i \neq 1, j, n$

$$p^*_1 = p_1 + \alpha p_j, p^*_j = 0, \; p^*_n = p_n + (1-\alpha)p_j.$$

Selon l'axiome d'absence d'illusion, il s'ensuit que

$$\boxed{\widetilde{A} \sim \widetilde{A}^*}$$

7. Selon l'axiome de non-saturation

$$\hat{A} \sim \widetilde{A}^* \leftrightarrow \{\hat{p}_1 = p^*_1 \quad \text{et} \quad \hat{p}_n = p^*_n\}$$

ce qui revient à dire

$$\hat{A} \sim \widetilde{A}^* \leftrightarrow \alpha = \lambda$$

8. Puisque $A \sim \hat{A}$ par construction et que $\widetilde{A} \sim \widetilde{A}^*$ parce que ce sont des loteries équivalentes, nous avons

$$A \sim \widetilde{A} \leftrightarrow \alpha = \lambda$$

Q.E.D.

Une fois que le théorème de substitution est accepté, l'approche de Karl Borch permet toujours d'en arriver au principe MUE. Selon cette démarche, l'axiome d'indépendance n'est pas nécessaire. Mais, à cause de sa notoriété, je vais lui accorder une attention particulière.

4. « L'AXIOME » D'INDÉPENDANCE DE SAVAGE

L'axiome d'indépendance de Savage (*sure thing principle* [10]) peut s'énoncer comme suit : Soit deux loteries

$$B : (p, 1-p \, ; \, A_i, A) \text{ et } C : (p, 1-p \, ; \, A_j, A)$$

où A_i et A_j sont deux loteries quelconque, alors

$$B \succ C \leftrightarrow A_i \succ A_j$$

peu importe la loterie A.

L'expérience montre que « l'axiome » d'indépendance n'a rien d'axiomatique au sens où nous l'entendons. Considérons en effet les loteries suivantes :

$$B_1 : (.75, .25 ; 1, 1)$$
$$C_1 : (.75, .25 ; (.20, .80 ; 0, 2), 1)$$
$$B_2 : (.75, .25 ; 1, 0)$$
$$C_2 : (.75, .25 ; (.20, .80 ; 0, 2), 0).$$

Selon Savage, il devrait aller de soi d'observer

$$\{B_1 \gtreqless C_1 \quad \text{et} \quad B_2 \gtreqless C_2\} \leftrightarrow \{1 ; 1) \gtreqless (.20, .80 ; 0, 2)$$

cependant, bien des gens sont prêts à s'opposer à cette position jusqu'à ce qu'une démarche par l'absurde les amène dans une position insoutenable. En particulier, on pourrait trouver parmi ces gens des adeptes des modèles moyenne-variance.

Imaginons en effet une personne qui choisit des loteries suivant un indice

$$K_i = E_i - .75\sigma_i$$

où E_i est le gain espéré et σ_i est l'écart-type. Pour les loteries B_1, B_2, C_1 et C_2, on trouve

$$\begin{array}{ll} E_{B1} = 1.00 & \sigma_{B1} = 0.00 \\ E_{C1} = 1.45 & \sigma_{C1} = \sqrt{0.5475} \\ E_{B2} = 0.75 & \sigma_{B2} = \sqrt{0.1875} \\ E_{C2} = 1.20 & \sigma_{C2} = \sqrt{0.9600} \end{array}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{array}{ll} K_{B1} = 1.00 & K_{C1} = 0.90 \\ K_{B2} = 0.43 & K_{C2} = 0.47 \end{array}$$

Par conséquent, les choix de cette personne seront

$$B_1 \succ C_1 \quad \text{et} \quad C_2 \succ B_2$$

ce qui manifestement va à l'encontre de l'axiome de Savage.

Cette personne agit selon un principe de décision clairement énoncé et ce genre de critère est d'usage courant. Ce n'est certes pas un argument d'autorité du type « Selon Leonard Savage, vous êtes incohérente » qui va l'amener à reconsidérer ses préférences.

Nous pouvons maintenant demander à cet adepte du critère moyenne-variance de nous dire laquelle des deux loteries suivantes il préfère.

$$D : (.50, .50 ; B_1, C_2)$$
$$E : (.50, .50 ; C_1, B_2)$$

Selon toute vraisemblance, il nous dira qu'il préfère D à E puisque, peu importe le résultat final, il aura toujours en choisissant D une loterie qu'il préfère à l'autre. Mais, selon les règles du calcul des probabilités, D et E sont des loteries équivalentes. En effet,

$$D \equiv E : (.20, .50, .30 ; 0, 1, 2).$$

Parvenu à ce point, notre interlocuteur acceptera « l'axiome » d'indépendance de Savage et, en même temps, commencera à se rendre compte des dangers liés à l'usage de modèles de type moyenne-variance.

Si, suivant l'axiomatique présentée dans la section précédente, on accepte le principe MUE alors on peut justifier « l'axiome » d'indépendance de Savage. En effet, l'utilité espérée des loteries B et C peut s'écrire

$$U_B = pU_{A1} + (1-p)U_A \text{ et } U_C = pU_{A2} + (1-p)U_A.$$

Donc $U_B \; R \; U_C \leftrightarrow U_{A1} \; R \; U_{A2}$

et puisque $B \; \mathscr{R} \; C \leftrightarrow U_B \; R \; U_C$ et $A_1 \; \mathscr{R} \; A_2 \leftrightarrow U_{A1} \; R \; U_{A2}$,

il s'ensuit que $B \; \mathscr{R} \; C \leftrightarrow A_1 \; \mathscr{R} \; A_2$.

On peut donc considérer « l'axiome » d'indépendance de Savage comme étant un corollaire du principe MUE.

5. CONCLUSION

Le but de cette communication était de faire ressortir le caractère non axiomatique de deux propositions connues sous le nom d'axiome de substitution de Marschak et d'axiome d'indépendance de Savage. Une fois ce point de vue bien établi, j'ai essayé de montrer en utilisant une démarche par l'absurde, comment l'acceptation de ces deux propositions doit malgré tout s'imposer.

De cette démarche par l'absurde, j'ai tiré des propositions plus simples que celles de Marschak et de Savage et qui, selon mon expérience de l'enseignement, s'avèrent généralement acceptables. Ces propositions peuvent être présentées sous l'appellation d'axiomes et, rassemblées dans un processus déductif, peuvent justifier un théorème de substitution auparavant connu sous le nom d'axiome de substitution de Marschak. Ce théorème de substitution conduit logiquement au principe de maximisation de l'utilité espérée (principe MUE) et ensuite par déduction, on peut justifier « l'axiome » d'indépendance de Savage.

Les fondements axiomatiques du principe MUE tels que présentés dans la section 1 font ressortir le rôle capital du théorème de substitution. Si on y réfléchit bien, on peut avancer que le principe MUE n'est qu'un corollaire du théorème de substitution. Pour moi, prétendre que le théorème de substitution (« axiome » de substitution de Marschak) est de caractère axiomatique est, à toute fin pratique, équivalent à prétendre que l'énoncé du principe MUE est lui-même de caractère axiomatique. À venir jusqu'à ce jour, je n'ai rencontré personne soutenant cette dernière prétention.

Parvenu à ce point, je ne peux que me ranger du côté de Maurice Allais et de Kahneman, Slovic et Tversky pour signaler les faiblesses descriptives du principe MUE. Faiblesses qui ne sont guère étonnantes, quand on prend conscience du lien logique existant entre les axiomes présentés et les règles du calcul des probabilités, et que l'on sait à quel point ces règles ne sont pas innées chez les individus (ici, je fais référence à mon propre enseignement et aux nombreuses expériences rapportées dans les périodiques spécialisés).

Néanmoins, les démarches par l'absurde proposées dans cette communication montrent clairement, à mon avis, que ceux qui violent les axiomes de rationalité s'exposent à avoir affaire à des personnes qui sauront tirer profit de leurs incohérences cachées. À titre d'exemple, tous les gens qui croient que la combinaison (1, 2, 3, 4, 5, 6) est moins probable que la combinaison (7, 14, 26, 33, 37, 41), lorsque l'on choisit au hasard six nombres différents parmi les nombres entiers allant de un à quarante-neuf font, par leur illusion, la joie des dirigeants de Loto-Québec.

Je continuerai néanmoins à enseigner le principe MUE à mes étudiants d'économie du risque tout en insistant sur ses carences descriptives. Ceux qui ont un caractère chevaleresque essaieront d'expliquer aux esprits plus alertes les dangers qui les menacent lorsqu'ils violent les axiomes de rationalité. Ceux qui ont le sens des affaires essaieront de tirer profit des difficultés liées à la prise de décision en contexte d'incertitude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIS, M., « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience ». *Journal de la Société Statistique de Paris*, 1er trimestre, 1953, pp. 47-73.

[2] ________, « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, octobre 1953, pp. 503-546.

[3] BERNARD, G., « La théorie de l'utilité en face du risque », *Cahiers du séminaire d'économétrie*, n° 27, 1985, pp. 13-27.

[4] BERNOULLI, D., « Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk », *Econometrica*, janvier, 1954, pp. 23-35 (traduction du latin à l'anglais du texte original).

[5] BLANCHÉ, R., *L'axiomatique*, Presses universitaires de France, 1955.

[6] BORCH, K., *The Economics of Uncertainty*, Princeton University Press, 1968.

[7] KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. et TVERSKY, A., *Judgment Under Uncertainty : Heuristic and Biases*, Cambridge University Press, 1982.

[8] KUTTNER, R., « The Poverty of Economics », *The Atlantic*, février 1985, pp. 74-84.

[9] MACHINA, M.J., «« Expected Utility » Analysis Without the Undependence Axiom », *Econometrica*, mars 1982, pp. 277-323.

[10] MARSCHAK, J., « Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility », *Econometrica*, avril 1950, pp. 111-141.

[11] MENGER, K., *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, D. Reidel Publishing Co., 1979.

[12] SAMUELSON, P., « Probability, Utility, and the Independence Axiom », *Econometrica*, octobre 1952, pp. 670-678.

[13] Savage, L., « The theory of Statistical Decision », *American Statistical Assoc. Journal*, mars 1951, pp. 55-67.

[14] ________, *The Foundation of Statistics*, John Wiley, 1954, pp. 21-26.

[15] Shoemaker, P.J.H., « The Expected Utility Model : Its Variants Purposes, Evidence and Limitations », *Journal of Economic Literature*, juin 1982, pp. 529-563.

[16] Sinn, H.W., *Economic Decisions Under Uncertainty*, North-Holland Publishing Co., 1983.

[17] Stoll, R.R., *Sets, Logic and Axiomatic Theories*, W.H. Freeman and Co., 1961.

[18] Von Neumann, J. et O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1947.